Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 1, No. 12, Mar. 2019

Published online in March

المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، المجلد الأول ـ العدد الثاني عشر، مارس 2019م

الحلول الشبكية للمعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية

حميدة علي شفتر

قسم الرياضيات–كلية التربية– جامعة مصراتة

Hamida_ali2008@yahoo.com

الملخص:

تتناول هذه الورقة البحثية دراسة الحلول الشبكية للمعادلات التفاضلية الجزئية حيت تعتمد علي تقسيم المنطقة علي هيئة شبكة، ومن ثم تعويض المشتقات الجزئية في المعادلة التفاضلية الجزئية بما يعادلها في الفروقات الفردية (التفاضل العددي) ومن ثم الحصول على منظومة من المعادلات الخطية التي من السهل حلها باستخدام طريقة (جاوس سيدل) لان الأنظمة تكون أغلب عناصرها أصفارًا فيفضل استخدام الطرق التكرارية التي منها طريقة (جاكوبي) وطريقة (جاوس سيدل) ويفضل طريقة (جاوس سيدل) لأنها أسرع في التقارب، وقد استخدمت في هذه الورقة (الماتلاب) لحل الأنظمة باستخدام (جاوس سيدل).

الكلمات المفتاحية: معادلات تفاضلية جزية، طريقة (جاوس سيدل)، الفروقات الفردية.

Abstract:

This paper deals with the study of network solutions of partial differential equations, which is based on the division of the region in the form of a network. The partial derivatives are compensated in the partial differential equation by their equivalent in the individual differences (numerical differentiation), then get on system of linear equations that can be solved by using the method Gauss Sidel, because most the systems are most of the elements are Zeroes so it is preferred to use the methods of repetition, including the method of Jacobi and the method Gauss Sidel. Gauss Siddle method is preferred because it is faster in convergence, This paper used MATLAB to solve the system disintegration using Gauss Side.

المقدمة:

مما لاشك فيه أن المعادلات التفاضلية تعد فرعا من فروع الرياضيات، ولها مكانة مرموقة من حيث أهميتها النظرية والعلمية وتدخل في العديد من التطبيقات في جميع أنواع العلوم ومن اهم تطبيقات المعادلات

التفاضلية الجزئية، معادلة الحرارة، ومعادلة الموجة، ومعادلة بواسون ولذا كان موضوع بحثي في هذه الورقة الحلول الشبكية للمعادلات التفاضلية الجزئية.

لدراسة الحلول الشبكية للمعادلات التفاضلية الجزئية لا بد أن نكون أولاً على إلمام شامل بالمعادلات التفاضلية الجزئية وأنواعها، وبعض طرق حل الأنظمة الخطية، واستيعابها جيداً ولذا فإننا سوف نتطرق إلى المفاهيم الأساسية للمعادلات التفاضلية الجزئية وأنواعها وطريقة جاوس سيدل لحل الأنظمة الخطية.

1- تعريف المعادلة التفاضلية الجزئية "Partial Differential Equation"

وهي المعادلة التفاضلية التي تحتوي على دالة مجهولة مع المشتقات الجزئية لهذه الدالة (الدالة تعتمد علي أكثر من متغير مستقل).

ومن أشهر المعادلات التفاضلية الجزئية المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية والصورة العامة لها هي:

$$AZ_{xx} + BZ_{xy} + CZ_{yy} + DZ_X + EZ_y + Fz = G$$

حيث أن G, F, E, D, C, B, A دوال وقد يكون بعضها أو كلها ثوابت.

وتصنّف هذه المعادلة على حسب المميز " $B^2 - 4AC$ " إلى :-

-معادلة تفاضلية جزئية ناقصيه " $B^2 - 4AC < 0$ " Elliptic Equation

-معادلة تفاضلية جزئية مكافئة " $B^2 - 4AC = 0$ " Parabolic Equation

-معادلة تفاضلية جزئية زائدية " $B^2 - 4AC > 0$ " Hyperbolic Equation

الحلول الشبكية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية تعتمد علي تحويل المعادلة التفاضلية إلى معادلات فروق محدودة بالإضافة الي تقسيم الفترة الزمنية للحل إلى عدد محدد من الفترات الجزئية بخطوة زمنية ΔT وتقسيم المسافات في اتجاهين t , x إلى عدد محدد من المسافات الجزئية بفروق $\Delta t , \Delta x$ وباستبدال المشتقات الجزئية بالفروق المحدودة نحصل على نظام من المعادلات الجبرية الخطية الآنية ، يكون عدد المعادلات فيه مساوياً لعدد العقد الداخلية بالشبكة [الشبكة تكون ناتجة من تقاطع تقسيم المسافات بين x , t] ويتم حل نظام المعادلات الناتج باستخدام الطرق التكرارية لحل منظومة من المعادلات الجبرية الخطية وهناك نوعين للطرق التكرارية لحل المعادلات التفاضلية طريقة جاكوبي طريقة جاوس سيدل.

سوف نستخدم في هذه الورقة البحثية طريقة جاوس سيدل وذلك لأن الطرق المباشرة (طريقة جاوس لتعويض الخلفي، طريقة كرايمر، طريقة المعكوس) في أغلب الأحيان لا تعطي نتائج مع الأنظمة التي تكون أغلب معاملاتها أصفار، وطريقة جاوس سيدل أسرع في التقارب من طريقة جاكوبي.

2- طريقة جاوس سيدل:

تستخدم طريقة جاوس سيدل لحل أنظمة المعادلات الخطية التي أغلب معاملاتها أصفار لاستخدام طريقة جاوس سيدل نتبع الخطوات الأتية:

أولاً: يتم اختيار نقطة ابتدائية لكل المتغيرات المجهولة وعادة ما تأخذ كل المتغيرات قيم صفرية أي أنه يتم بالبداية بمتجه صفري.

ثانياً: يتم إيجاد قيم المتغير الأول من المعادلة الأولى والمتغير والثاني من المعادلة الثانية وهكذا إلى نهاية المتغيرات.

ثالثاً: يتم حساب قيمة كل متغير مستخدماً أخر قيم تم إيجادها بالنسبة للمتغيرات الأخرى.

رابعاً: نستمر في تكرار الخطوة الثالثة إلى أن يتم الحصول على قيم متشابهة لنفس المتغير وتكون هذه القيم هي القيمة المطلوبة.

لتحويل المعادلة التفاضلية الجزئية الي معادلة جبرية نقوم باستخدام احد الفروقات الفردية.

3- الفروقات الفردية:

3-1 الفروق الأمامية:

لتكن f دالة معرفة على مجموعة من النقاط متساوية الأبعاد ولتكن النقاط هي $x_0, x_1 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots, x_n$ فإنه يمكن كتابتها على صورة $x_i = x_0 + ih \quad , \quad i = 0\,, 1,2, \dots \dots, n$

ولأي نقطة أخرى مختلفة x يزداد تقريب قيمة الدالة $x = x_0 + sh$ يعرف الفرق الأمامي للفروق الفردية كما يلي:

$$\Delta f = f(x+h) - f(x)$$

ويرمز له بالرمز $\Delta\, f$ ويسمى بالفرق الأمامي من الرتبة الأولى:

$$\Delta\, f_i = f_{i+1} - f_i$$

الصيغة العامة لصيغة نيون للفروق الأمامية هي $x = x_0 + sh$

$$f_n(x) = f_n(x_0 + sh)$$

$$= \mathrm{f}_0 + \mathrm{s}\Delta\mathrm{f}_0 + \mathrm{s}(\mathrm{s}-1)\frac{\Delta^2\,\mathrm{f}_0}{2!} + \cdots + \mathrm{s}(\mathrm{s}-1)(\mathrm{s}-2)\ldots\ldots\ldots\frac{(s-n+1)}{n!}\,\Delta^n f_0$$

.

3–2 الفروق الخلفية:–

يعرف الفرق الخلفي الأول عند $x = x_i$ كما يلي:

$$\Delta\, f_i = f_i - f_{i-1}$$

والفروق من الرتب العليا تعرف كما يلي:

$$\nabla^m\, f_i = \nabla(\nabla^{m-1}\, f_i)$$

وصيغة نيوتن للفروق الخلفية كما يلي:

$$P_n(x_n + sh) = f_n + \nabla f_n s + \tfrac{1}{2!}\nabla^2 f_n s(s+1) + \tfrac{1}{3!}\nabla^3 f_n s(s+1)(s+2)$$

$$\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n!}\,\nabla^n f_n\, s\,(s+1)\ldots..(s+n-1)$$

وتعتبر صيغة الفروق الأمامية والخلفية وسيلة فعالة لتقدير $f(x)$ عند نقطة ما وسطى قيم x_i لدالة f مجدولة عند $n + 1$ من النقاط x على ابعاد متساوية.

3–4 الفروقات المركزية

تعرف صيغة الفروق المركزية على صورة:

$$sf_{i+\frac{1}{2}} = f_{i+1} - f_i$$

$$s^2 f_i = sf_{i+\frac{1}{2}} - sf_{i-\frac{1}{2}}$$

وفرق الفروق من الرتب العليا كما يلي:

$$s^{2n-1} f_{i+\frac{1}{2}} = s^{2n-2} f_{i+1} - s^{2n-2} f_i$$

$$s^{2n} f_i = s^{2n-1} f_{i+\frac{1}{2}} - s^{2n-1} f_{i-\frac{1}{2}}$$

صيغة نيوتن للفروق المركزية هي:

$$f_n(x_m + sh) = f_m + \left\{\frac{s}{2(1!)}\left(sf_{m+\frac{1}{2}} + sf_{m-\frac{1}{2}}\right) + \frac{s^2}{2!}s^2 f_m\right\}$$

$$+\frac{s(s^2-1)}{2(3!)}\left[s^3 f_{m+\frac{1}{2}} + s^3 f_{m-\frac{1}{2}}\right] + \frac{s^2(s^2-1)}{4!}s^4 f_{m+\cdots}$$

ملاحظة

يمكن استخدام الفروق المحدودة لإيجاد مشتقة الدالة وذلك كما يلي

$$D^n(f) = \frac{1}{h^n}\Delta^n f$$

وبصورة خاصة فإن المشتقة الأولى والثانية يمكن إيجادها باستخدام القوانين التالية:

$$\bar{\bar{f}}(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

فروق أمامية $\bar{f}(x) = \frac{1}{2h}[-f(x+2h) - 3f(x) + 4f(x+h)]$

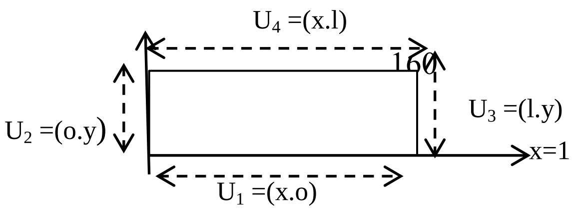
فروق مركزية $\bar{f}(x) = \frac{1}{2h}[f(x+h) - f(x-h)]$

فروق خلفية $\bar{f}(x) = \frac{1}{2h}[f(x-2h) + 3f(x) - 4f(x-h)]$

لحل المعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام الشبكات سوف نقوم بعرض كل نوع من أنواع المعادلات التفاضلية الجزئية كل علي حدي كما يلي:

4– المعادلة التفاضلية الجزئية التناقصية:

تستخدم المعادلات التفاضلية الجزئية التناقصية لتمييز النظم الهندسية في حالة الاستقرار مع الزمن كما في مسائل القيمة الحدودية، ومن الأمثلة العملية على هذا النوع من المعادلات معادلة لا بلاس التي تمثل التوصيل الحراري في صفيحة معدنية مربعة (أو مستطيلة) الشكل مثبتة أطرافها (أو حدودها) عند درجات حرارة محددة كما في الشكل (1).



شكل (1) انتقال الحرارة فى صفيحة معدنية

يمكن وصف انتقال الحرارة بالتوصيل في حالة الاستقرار مع الزمن وفي بعدين $t\,,x$ باستخدام معادلة لابلاس، حيث تأخذ معادلة التوصيل الحراري بالنسبة للصفيحة الموضحة بالشكل (1) الصيغة التالية:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad (1-4)$$

حيث u هي درجة الحرارة المراد إيجادها.

وللشروع في حل هذه المعادلة التفاضلية الجزئية والحصول على توزيع درجات الحرارة داخل الصفيحة تبدأ بتحويل الصفيحة إلى شبكة من النقاط المنفصلة تسمى العقد تبعد عن بعضها البعض بمسافات Δx في الاتجاه الافقي و Δt في الاتجاه الرأسي .

بعد ذلك نقوم بتمثيل التفاضلات الجزئية الثانية عند العقدة $(i\,,j)$ وذلك لجميع قيم $1 < i < n$ وجميع قيم $1 < j < m$ بمعادلات الفروق المحدودة المركزية من المرتبة الثانية التي يمكن كابتها كالآتي.

$$\nabla^2 u(x_i, t_j) = \frac{(x_{i+1}) - 2u(x_i,t_j) + u(x_{i-1},t_j)}{(\Delta x)^2} + \frac{u(x_i,t_j+1) - 2u(x_i,t_j) + u(x_i,t_j-1)}{(\Delta t)^2} \qquad (2-4)$$

سوف نستخدم التدليل المزدوج على u للتعبير عن قيم y, x أي

$$\nabla^2 u_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta t)^2} = 0 \qquad (3-4)$$

ولزيادة التبسيط سوف نفترض أن $\Delta \mathrm{x} = \Delta t = \mathrm{h}$ فنحصل على

$$\nabla^2 u_{i,j} = \frac{1}{h^2}\left[u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}\right] = 0 \qquad (4-4)$$

بهذا نحصل على عدد من المعادلات الجبرية الأنية $(n \times m)$ وتكون قيم $u_{i,j}$ الحدودية وهي معروفة بمثابة الطرف الأيمن لهذه المعادلات ويمكن كتابة الشروط الحدودية كالاتي.

$$u_{i,0} = u_1; u_{i,m+1} = u_4 \; ; \; i = 1,2, \ldots\ldots n$$
$$u_{0,j} = u_2; u_{n+1,j} = u_3 \; ; \; i = 1,2, \ldots\ldots m$$

وللحصول على نظام المعادلات علي هيئة مصفوفة نغير التدليل i من 1 إلى n بينما كون قيمة التدليل j ثابتة عند $j = 1$ ونحصل بذلك على عدد n من المعادلات وبعد ذلك تغير i من 1 إلى n بينما تكون قيمة j ثابتة عند $j = 2$ فنحصل على عدد n آخر من المعادلات وهكذا حتى نصل إلى $j = m$ فتكون عدد المعادلات التي حصلنا عليها هي $m \times n$ من المعادلات.

وتكون الصورة العامة لهذا النظام من المعادلات علي هيئة مصفوفة كما يلي $[A][T] = [B]$ $(5-4)$

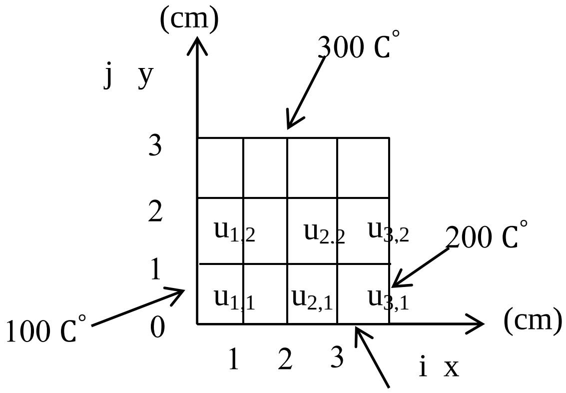
حيث $[A]$ هي مصفوفة المعاملات، وهي مصفوفة مربعة عدد صفوفها $= (n \times m)$ وعدد أعمدتها $= (n \times m)$ أي أن عدد عناصرها $n^2 \times m^2$ والمصفوفة $[u]$ هي مصفوفة المجاهيل وهي مصفوفة عمود وعدد صفوفها هو $(n \times m)$ والمصفوفة $[B]$ هي مصفوفة الطرف الأيمن وهي أيضاً مصفوفة عمود يبلغ عدد صوفها $(n \times m)$.

مثال:

اوجد نظام المعادلات الناتجة عن تطبيق المعادلة

$$\nabla^2 u_{i,j} = \frac{1}{h^2}\left[u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}\right] = 0$$

في المسألة الموضحة بالشكل التالي:



4

$50\ C^{\circ}$

الشكل (2)

الحل:

من الشكل نستنتج أن $\Delta x = \Delta t = h = 2$ و $n = 3$ ، $m = 2$ أي المصفوفة المعاملات من النوع 6×6 أي انه يتم استنتاج 6 معادلات وهي:

$$j = 1\,, i = 1 \ : u_{2,1} + u_{0,1} + u_{1,2} + u_{1,0} - 4u_{1,1} = 0$$
$$j = 1\,, i = 2 \ : u_{3,1} + u_{1,1} + u_{2,2} + u_{2,0} - 4u_{2,1} = 0$$
$$j = 1\,, i = 3 \ : u_{4,1} + u_{2,1} + u_{3,2} + u_{3,0} - 4u_{3,1} = 0$$
$$j = 2\,, i = 1 \ : u_{2,2} + u_{0,2} + u_{1,3} + u_{1,1} - 4u_{1,2} = 0$$
$$j = 2\,, i = 2 \ : u_{3,2} + u_{1,2} + u_{2,3} + u_{2,1} - 4u_{2,2} = 0$$
$$j = 2\,, i = 3 \ : u_{4,2} + u_{2,2} + u_{3,3} + u_{3,1} - 4u_{3,2} = 0$$

وبالتعويض عن القيم المعروفة في المعادلة نحصل على

$$u_{1,0} = 50 \quad , u_{2,0} = 50\,, u_{3,0} = 50$$

$$u_{0,1} = 100 \quad , u_{0,2} = 100$$
$$u_{1,3} = 300 \quad , u_{2,3} = 300 \quad , u_{3,3} = 300$$
$$u_{4,1} = 200 \quad , = u_{4,2} = 200$$
$$u_{2,1} + u_{1,2} - 4u_{1,1} = -150$$
$$u_{3,1} + u_{1,1} + u_{2,2} - 4u_{2,1} = -50$$
$$u_{2,1} + u_{3,2} - 4u_{3,1} = -250$$
$$u_{2,2} + u_{1,1} - 4u_{1,2} = -400$$
$$u_{3,2} + u_{1,2} + u_{2,1} - 4u_{2,2} = -300$$
$$u_{2,2} + u_{3,1} - 4u_{3,2} = -500$$

نستطيع وضع المعادلات السابقة في صورة مصفوفة كالآتي

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ u_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -150 \\ -50 \\ -250 \\ -400 \\ -300 \\ -500 \end{bmatrix}$$

وبحل هذه المعادلات بطريقة جاوس سيدل نحصل على قيم درجات الحرارة المطلوبة ولسهولة التعامل مع برنامج الماتلاب نفرض أن

$$u_1 = u_{1,1} \quad , \; u_2 = u_{2,1} \quad , u_3 = \; u_{3,1}$$

$$u_4 = u_{1,2} \quad , \; u_5 = u_{2,2} \quad , u_6 = \; u_{3,2}$$

برنامج لحـل المعـادلات الجزئيـة التناقصية باستخـدام الماتـلاب

```
u1=input('enter u1:')
u2=input('enter u2:')
u3=input('enter u3:')
u4=input('enter u4:')
u5=input('enter u5:')
u6=input('enter u6:')
for i=1:20;
    u1=(150+u2+u4)/4;
    u2=(50+u1+u3+u5)/4;
    u3=(250+u2+u6)/4;
    u4=(400+u1+u5)/4;
    u5=(300+u2+u4+u6)/4;
    u6=(500+u3+u5)/4;
    i
    [u1 u2 u3 u4 u5 u6]
end
```

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 1, No. 12, Mar. 2019

Published online in March

المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، المجلد الأول ـ العدد الثاني عشر، مارس 2019م

i	u1	u2	u3	u4	u5	u6
0	0	0	0	0	0	0
1	37.5000	21.8750	67.9688	109.3750	107.8125	168.9453
2	70.3125	74.0234	123.2422	144.5313	171.8750	198.7793
3	92.1387	109.3140	139.5233	166.0034	193.5242	208.2619
4	106.3293	122.3442	145.1515	174.9634	201.3924	211.6360
5	111.8269	127.0927	147.1822	178.3048	204.2584	212.8601
6	113.8494	128.8225	147.9207	179.5269	205.3024	213.3058
7	114.5874	129.4526	148.1896	179.9724	205.6827	213.4681
8	114.8563	129.6821	148.2876	180.1347	205.8212	213.5272
9	114.9542	129.7658	148.3232	180.1939	205.8717	213.5487
10	114.9899	129.7962	148.3362	180.2154	205.8901	213.5566
11	115.0029	129.8073	148.3410	180.2232	205.8968	213.5594
12	115.0076	129.8113	148.3427	180.2261	205.8992	213.5605
13	115.0094	129.8128	148.3433	180.2271	205.9001	213.5609
14	115.0100	129.8134	148.3436	180.2275	205.9004	213.5610
15	115.0102	129.8136	148.3436	180.2277	205.9006	213.5610
16	115.0103	129.8136	148.3437	180.2277	205.9006	213.5611
17	115.0103	129.8136	148.3437	180.2277	205.9006	213.5611
18	115.0103	129.8137	148.3437	180.2277	205.9006	213.5611
19	115.0103	129.8137	148.3437	180.2277	205.9006	213.5611
20	115.0104	129.8137	148.3437	180.2277	205.9006	213.5611

نلاحظ من المثال السابق بانه قيمه (i=1:20) كلما زادت قيمة i كلما زادت قيمة الدقة u

5) المعادلات التفاضلية الجزئية المكافئة:

تظهر المعادلات الجزئية المكافئة من خلال عملية انتشار أحادي الأبعاد في قضيب معدني بالمعادلة الاتية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\propto} \ \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1-5)$$

بحيث تكون قيمة $u(X\ ,\ t)$ الحدودية عند حدود X عند أي لحظة t كالآتي:

$$u(a,t) = u_a, u(b,t) = u_b$$

وتكون قيمة الدالة خلال الوسط في البداية كالآتي:

$$u(x,0) = u_0$$

وبنفس الطريقة التي اتبعناها عند حل المعادلات الجزئية الناقصية، سوف نقسم المنطقة إلى $n+1$ من الفترات الجزئية طولها $\Delta\times$ ونرمز لها بالمؤشر i الذي يتغير من 0 إلى $n+1$ ، ولكننا سنبقى عدد التقسيمات في اتجاه t غير محدد ، وذلك لأن نطاق t مفتوح، وسنفرض أن اتساع تقسيمة t هو Δt وسنستخدم المؤشر j للدلالة عليه بعد ذلك نقوم باستبدال التفاضلات الجزئية عند العقد $(i\ ,j)$ بما

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 1, No. 12, Mar. 2019

Published online in March

المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، المجلد الأول ـ العدد الثاني عشر، مارس 2019م

يعادلها في التفاضل العددي باستخدام الفروقات الفردية، فبالنسبة إلى التفاضل الجزئي الثاني بالنسبة للمتغير المستقل $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ يمثل بتعبير الفرق المركزي من المرتبة الثانية كما يلي.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \qquad (2-5)$$

أما بالنسبة للتفاضل الجزئي الأول $\frac{\partial u}{\partial t}$ فيمكن استبداله عند نقطة i, j بتعبير الفرق الأمامي من المرتبة الأولى، الذي يمكن كتابته في هذه الحالة كالآتي:

$$\frac{\partial t}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} \qquad (3-5)$$

وبالتعويض بالمعادلتين (5 – 2) و (5 – 3) في المعادلة التفاضلية الجزئية

(5– 1)، نحصل على المعادلات الجبرية الآتية:

$$u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} = \frac{\Delta x^2}{\propto \Delta t}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) \qquad (4-5)$$

$$i = 1,2, \dots \dots \dots, n$$

$$j = 0,1,2, \dots \dots \dots, \infty$$

ومن الواضح أن مجموعة المعادلات الجبرية الناتجة في هذه الحالة مختلفة عن مجموعة المعادلات الناتجة في حالة المعادلات الناقصية، ففي حالات المعادلات الناقصية، تكون مجموعة المعادلات معروفة العدد ($n \times m$) وتحل مرة واحدة (آنياً) لإيجاد قيم الدالة عبر الحيز المعطى، وهي قيم مستقرة بالنسبة للزمن، بينما تمثل المعادلات في هذه الحالة منظومة غير مستقرة، ولذلك سوف نحل المعادلات بطريقة متتابعة بتغيير المؤشر j من 1 إلى أي قيمة نهائية مطلوبة، وفي كل مرة نوجد توزيع الدالة داخل نطاق x، أي أننا سنوجد الحل عند $j + 1$ بدلالة الحل عند j، مبتدئين من قيمة الدالة عند $j = 0$ وهو الشرط الابتدائي المعطى بالمعادلة (5–1) والذي يمكن كتابته بدلالة المؤشر i , j كالآتي:

$$u_{i,0} = u_0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots \dots, n \qquad (5-5)$$

وكذلك سنستخدم عند كل خطوة، الشروط الحدودية المعطاة بالمعادلة (2 – 6) والتي يمكن كتابتها بدلالة المؤشرين i , j :

$$u(o,j) = u_a\,,\ \ u(n+1,j) = u_b \quad ; \quad j = 1,2\,,\dots\dots,\infty \qquad (6-5)$$

بعد ذلك تم الحصول على الحساب $u_{i,j+1}$ نرتب المعادلة (4–5) بحيث تكون $u_{i,j+1}$ في الطرف الأيسر وبقية المعادلة في الطرف الأيمن:

$$u_{i,j+i} = \left(1 - \frac{2 \propto \Delta t}{(\Delta x)^2}\right) u_{i,j} + \frac{\propto \Delta t}{(\Delta x)^2} u_{i+1,j} + \frac{\propto \Delta t}{(\Delta x)^2}\, u_{i-1,j} \qquad (7-5)$$

وتعتبر هذه الصيغة بمثابة علاقة تتابعية وليست تكرارية لأننا نحصل على الحل بالتعويض المباشر في الطرف الأيمن منها، لجميع قيم i أولاً، ثـم بعد ذلك نتقدم في الاتجاه الأمامي للمؤشر j ، وبالرغم من أن هذه الصيغة ليست تكراريـة، إلا أنـها قد تكون غير مستقرة في بعض الأحيان، وقد وجد أن شرط استقرار هذه الطريقة قد يحقق المتباينة:

$$\frac{2 \propto \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 1 \qquad (8-5\,)$$

وهو يشابه شروط التقارب التي تصاحب الطرق التكرارية والآن سنوضح استخدام هذه الطريقة بالمثال الآتي:

مثال 2

أوجد الحل التقريبي للمعادلة التفاضلية الجزئية المكافئة الآتية مع مراعاة الشروط المصاحبة.

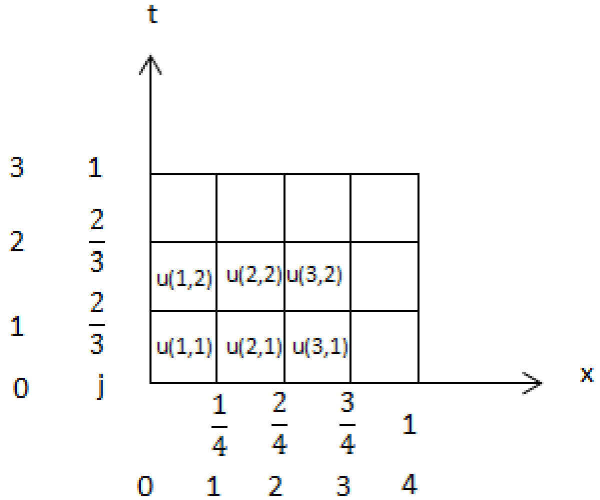
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad u\,(0.45, t) = 200$$

$$u\,(x\,,0) = 0$$

$$u(0\,,t) = u\,(\,1\,,t\,) = 200$$

$$\Delta t = 02 \ , \Delta t = 0.015$$

الحـــل:



$$u_{i,j+i} = \left(1 - \frac{2 \propto \Delta t}{(\Delta x)^2}\right) u_{i,j} + \frac{\propto \Delta t}{(\Delta x)^2} u_{i+1,j} + \frac{\propto \Delta t}{(\Delta x)^2} u_{i-1,j}$$

$j = 1 , i = 1 \qquad u_{1,2} - 0.25u_{1,1} - 0.375u_{2,1} - 0.375u_{0,1}$

$j = 1 , i = 2 \qquad u_{2,2} - 0.25u_{2,1} - 0.375u_{3,1} - 0.375u_{1,1}$

$j = 1 , i = 3 \qquad u_{3,2} - 0.25u_{3,1} - 0.375u_{4,1} - 0.375u_{2,1}$

$j = 2 , i = 1 \qquad u_{1,3} - 0.25u_{1,2} - 0.375u_{2,2} - 0.375u_{0,2}$

$j = 2 , i = 2 \qquad u_{2,3} - 0.25u_{2,2} - 0.375u_{3,2} - 0.375u_{1,2}$

$j = 2 , i = 3 \qquad u_{3,3} - 0.25u_{3,2} - 0.375u_{4,2} - 0.375u_{2,2}$

وبالتعويض بالشروط الحدية

$u_{0,1} = 200 \qquad , u_{4,1} = 200 \qquad , u_{0,2} = 200$

$u_{1,3} = 200 \qquad , u_{2,3} = 200 \qquad , u_{3,3} = 200$

$$u_{4,2} = 200$$

حصل على المعادلات الآتيـة:

$$0.25u_{1,1} + 0.375\,u_{2,1} - u_{1,2} = -75$$

$$0.375u_{3,1} + 0.375\,u_{1,1} - 0.25_{2,1} - u_{2,2} = 0$$

$$0.25u_{3,1} + 0.375\,u_{2,1} - u_{3,2} = -75$$

$$0.25u_{2,2} + 0.375\,u_{2,2} = 125$$

$$0.25u_{2,2} + 0.375\,u_{3,2} - 0.375u_{1,2} = 200$$

$$0.25u_{3,2} + 0.375\,u_{2,2} =$$

$$\begin{bmatrix} -.25 & 0.375 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0.375 & 0.25 & 0.375 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0.375 & 0.25 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.375 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.375 & 0.25 & 0.375 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ u_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -75 \\ 0 \\ -75 \\ 125 \\ 200 \\ 125 \end{bmatrix}$$

وباستخدام طريقة جاوس سيدل نستطيع حل هذا النظام وذلك كالاتي ولسهولة التعامل مع برنامج الماتلاب نفرض أن:

$u_1 = u_{1,1}$,$u_2 = u_{2,1}$,$u_3 = u_{3,1}$

$u_4 = u_{1,2}$,$u_5 = u_{2,2}$,$u_6 = u_{3,2}$

برنامج لحل المعادلات الجزئية المكافئة باستخدام الماتلاب

```
u1=input('enter u1:');
u2=input('enter u2:');
u3=input('enter u3:');
u4=input('enter u4:');
u5=input('enter u5:');
u6=input('enter u6:');
for i=1:20
    u1=(-75-0.375*u2+u4)/0.25;
    u2=(-0.375*u1-0.375*u3+u5)/0.25;
    u3=(-75-0.375*u2+u6)/0.25;
    u4=(125-0.375*u5)/0.25;
    u5=(200-0.375*u4-0.375*u6)/0.25;
    u6=(125-0.25*u5)/0.375;
    i
    [u1 u2 u3 u4 u5 u6]
end
```

i	u1	u2	u3	u4	u5	u6
0	0	0	0	0	0	0
1	-300	450	-975	500	50	300
2	1.0250	0.1250	0.7125	0.4250	-0.2875	0.5250
3	1.2125	-4.0375	7.8563	0.9313	-1.3844	1.2563
4	0.9481	-3.1544	5.2041	0.2577	-0.4949	0.3633
5	0.5732	-1.8384	2.8999	0.0792	-0.1653	0.1136
:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:
16	1.4700	-4.4154	6.6289	0.0033	-0.0072	0.0048
17	0.6636	-1.9926	2.9909	0.0011	-0.0023	0.0015
18	0.2993	-0.8985	1.3484	0.0003	-0.0008	0.0005

Scientific Journal of Faculty of Education, Misurata University-Libya, Vol. 1, No. 12, Mar. 2019

Published online in March

المجلة العلمية لكلية التربية، جامعة مصراتة، ليبيا، المجلد الأول ـ العدد الثاني عشر، مارس 2019م

6- المعادلات التفاضلية الجزئية الزائدية:

الصورة العامة للمعادلات الزائدية هي:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (1-6)$$

وهي معادلة انتشار الموجة في الاتجاه الأفقي x، وتصاحب هذه المعادلة أربعة شروط : شرطان ابتدائيان هما قيم $u(x,o)$ وقيم $\frac{\partial u}{\partial t}(x,o)$ وشرطان حدوديان هما قيم $u(a,t)$ وقيم $u(b,t)$، حيث $[a,b]$ هو النطاق المغلق للمتغير المستقل x، وكما هو في حالة المعادلات المكافئة فإن نطاق t مفتوح $[0,\infty]$ وستكون شبكة العقد مشابهة تماماً للشكل الخاص بالمعادلات الناقصية.

والأن سنقوم باستبدال التفاضلات المختلفة بتفاضلات عددية كالاتي:

نستبدل التفاضل الجزئي $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ بتعبير الفرق المركزي

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \qquad (2-6)$$

كما نستبدل التفاضل الجزئي $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ بنفس التعبير، أي أن:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{(\Delta t)^2} \quad ; \quad j = 1,2,\dots\dots,\infty \qquad (3-6)$$

وأخيراً نستبدل التفاضل الجزئي $\frac{\partial u}{\partial t}$ الوارد في الشروط الابتدائية بتعبير الفرق الأمامي من المرتبة الأولى، أي أن :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,1}-u_{i,0}}{\Delta t} \qquad (4-6)$$

وبالتعويض بالمعادلتين (2-6) و (3-6) في المعادلة (1-6).

وبترتيب المعادلة بحيث نحصل على صيغة تتابعية صريحة نجد أن:

$$u_{i,j+1} = -u_{i,j-1} + \left[\frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2}\, c^2\right]\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}\right) + \left[2(1 - \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2}\, c^2\ \right] u_{i,j}$$

في هـذه الصيغة العددية، نجد أن قيمة الدالة u عند $j+1$ تحسب تتابعياً بدلالة قيمة الدالة عند j ، وقيمتها عند $j-1$، ذلك لجميع قيـم i، وتشبه هذه الصيغة تلك الصيغ غير ذاتية البدء.

وسوف نستخدم التعبير العددي المعطي بالعلاقة (4–6) فبواسطته نستطيع إيجاد $u_{i,1}$ من $u_{i,0}$ لجميع قيم i، بدلالة لكل من $u_{i,0}$ و $u_{i,1}$ وهكذا حتى نصل إلى قيمة j المطلوبة.

وتعاني هذه الصيغة من إمكانية عدم الاستقرار إذا كانت:

$$\frac{(\Delta t)^2 c^2}{(\Delta x)^2} > 1$$

تماما كما هو الحال في المعادلة المكافئة لذلك يجب اختيار قيم Δt و Δx بحيث تكون قيمة :

$$\frac{(\Delta t)^2 c^2}{(\Delta x)^2} \leq 1$$

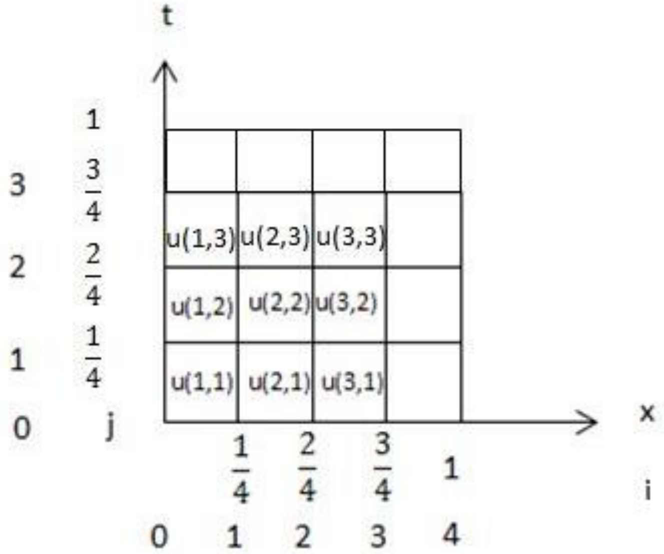
مثال (4 – 2)

عين حلاً تقريباً للمعادلة $0 < t$, $0 < x < 1$ ، $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$

$$u(1,t) = 0 \qquad , u(0,t) = 0$$

$$u(x,0) = 0 \qquad , \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1$$

إذا كانت $c = 2\ ,\ \Delta x = \Delta t = \frac{1}{4}$



الحـل:

$$u_{i,j+1} = -u_{i,j-1} + \left[\frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2}\ c^2\right]\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}\right)$$
$$+ \left[2(1 - \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} c^2)\right] u_{i,j}$$

$$j = 1 , i = 1 \ : u_{1,2} + u_{1,0} - 2u_{2,1} - 2u_{0,1} + 2u_{1,1} = 0$$
$$j = 1 , i = 2 \ : u_{2,2} + u_{2,0} - 2u_{3,1} - 2u_{1,1} + 2u_{2,1} = 0$$
$$j = 1 , i = 3 \ : u_{3,2} + u_{3,0} - 2u_{4,1} - 2u_{2,1} + 2u_{3,1} = 0$$
$$j = 2 , i = 1 \ : u_{1,3} + u_{1,1} - 2u_{2,2} - 2u_{0,2} + 2u_{1,2} = 0$$
$$j = 2 , i = 2 \ : u_{2,3} + u_{2,1} - 2u_{3,2} - 2u_{1,2} + 2u_{2,2} = 0$$
$$j = 2 , i = 3 \ : u_{3,3} + u_{3,1} - 2u_{4,2} - 2u_{2,2} + 2u_{3,2} = 0$$
$$j = 3 , i = 1 \ : u_{1,4} + u_{1,2} - 2u_{2,3} - 2u_{0,3} + 3u_{1,3} = 0$$
$$j = 3 , i = 2 \ : u_{2,4} + u_{2,2} - 2u_{3,3} - 2u_{1,3} + 2u_{2,3} = 0$$
$$j = 3 , i = 3 \ : u_{3,4} + u_{3,2} - 2u_{4,3} - 2u_{2,3} + 2u_{3,3} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ u_{3,2} \\ u_{1,3} \\ u_{2,3} \\ u_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1/4 \\ -1/4 \\ -1/4 \end{bmatrix}$$

وباستخدام طريقة جاوس سيدل نستطيع حل هذا النظام وذلك كالآتي:

برنامج لحل المعادلات الجزئية الزائدية باستخدام الماتلاب

```
u1=input('enter u1:');
u2=input('enter u2:');
u3=input('enter u3:');
u4=input('enter u4:');
u5=input('enter u5:');
u6=input('enter u6:');
u7=input('enter u7:');
u8=input('enter u8:');
u9=input('enter u9:');
for i=1:10
    u1=((2*u2)-u4)/2;
    u2=((2*u1)+(2*u3)-u5)/2;
    u3=((2*u2)-u6)/2;
    u4=(-u1+(2*u5)-u7)/2;
    u5=(-u2+(2*u4)+(2*u6)-u8)/2;
    u6=(-u3+(2*u5)-u9)/2;
    u7=((-1/4)-u4+(2*u8))/3;
    u8=((-1/4)-u5+(2*u7)+(2*u9))/3;
    u9=((-1/4)-u6+(2*u8))/(-1);
    i
    [u1 u2 u3 u4 u5 u6 u7 u8 u9]
end
```

المصادر والمراجع:

أ. المراجع العربية:

1- أحمد عبد العالي هب الريح، 2004م أساسيات المعادلات التفاضلية الجزئية (الجزء الثاني)،جامعة مصراتة .ليبيا.

2- سعد محمد فضيلة، النقاتي الربيعي ،2004 التحليل العددي للمهندسين مكتب البحوث والاستشارات الهندسية ليبيا، الطبعة الأولي.

3- ديفيدل. باورز. ترجمة: أ. د. علي محمد عوين، أ. د. أحمد صادق القرماني.2008 مسائل القيم الحدية، جامعة 7 أكتوبر إدارة المطبوعات والنشر الطبعة الثانية.

4- فاريز، بويدس، ترجمة د. رمضان محمد جهيمة ،د. كمال أبو القاسم أبودية، 2001 التحليل العددي منشورات ELGA.

ب. المراجع الأجنبية:

5- Volker J.2013 .*Numerical Methods* for Partial Differential. Equations. Summer Semester..lassification of Second Order .

6- Everstine.J. 2001 Numerical soluation of partial differential equations UK, Copyright (MiKTeX)

7- Zachmanolou and D. W1986.Introduction to Partial Differential Equations with Applications, Dover Publications, Inc., New York.